北京航空航天大学计算机学院
School of Computer Science and Engineering, Beihang University

混沌理论与深度学习

分享人：代明新
时间：2024.10

北京航空航天大学计算机学院
先进计算机应用技术教育部工程研究中心

目 录

CONTENTS

1

研究背景

Background

研究背景

混沌理论（Chaos Theory）是一门研究在动态系统中，即使是微小的初始条件变化也会导致巨大结果差异的学科。这一理论最早是在20世纪60年代由美国气象学家爱德华·洛伦兹（Edward Lorenz）提出的，并逐渐在多个科学领域中得到广泛应用，例如社会学、物理学、环境科学、计算机科学、工程学、经济学和生态学等。

混沌系统是指一类以高度复杂的非线性动力学为特征的动力系统。许多现实世界的现象，例如天气系统、股票市场和流体动力学系统，看似随机，但实际上遵循某些基本规则[1,2]。因此，对混沌系统进行建模和分析以理解自然现象并预测其行为是探索混沌系统演化模式的重要方向。

- 敏感依赖性
- 吸引子
- 非线性动力学
- 相空间
- Lyapunov指数

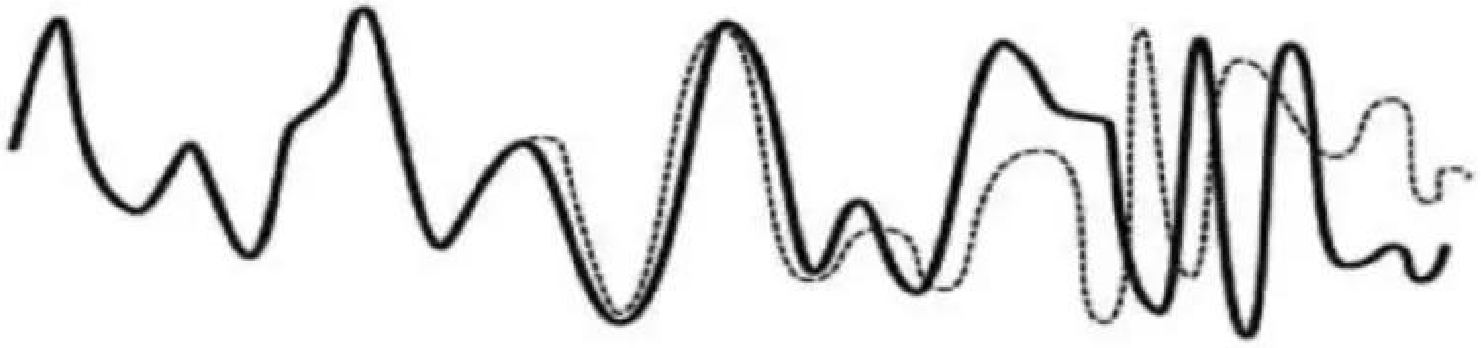


图1 运行了两个月的两个模拟天气斑图

研究背景

➢ 经典混沌系统

洛伦兹系统:

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

取参数a=10，b=8/3，变化r值来观察系统的不同样子。下面分别展示了取不同r值所对应的xy平面的二维和三维轨迹图：

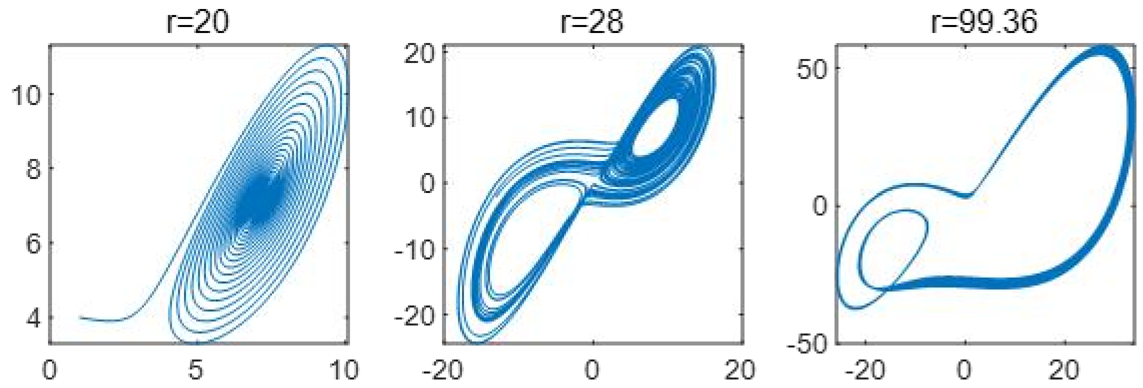


图2 洛伦兹系统不同r值对应的二维相轨线图。其中r=20时，对应系统收敛到定点。r=28对应混沌。r=99.36对应倍周期。

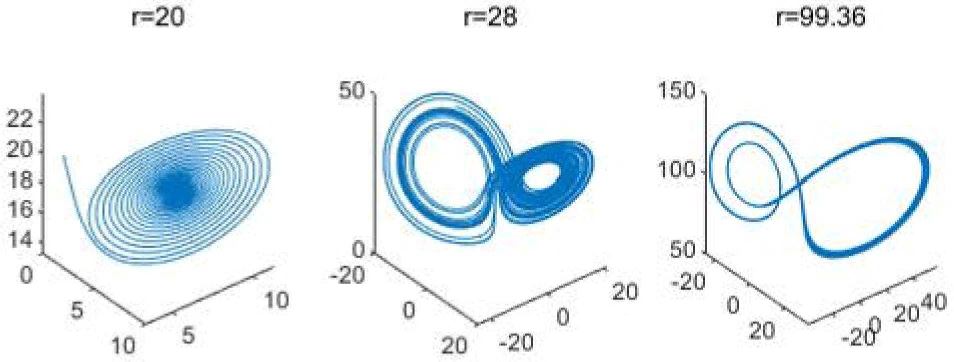


图3 洛伦兹系统不同r值对应的三维相轨线图

研究背景

➢ 时滞混沌系统

时滞系统是系统中一处或几处的信号传递有时间延迟的系统。

Mackey-Glass系统：

$$\frac{dx}{dt} = -bx(t) + \frac{ax(t-\tau)}{1+x^c(t-\tau)}$$

选取系统参数$a=0.2$，$b=0.1$，$c=10$，时滞$\tau=23$，M-G系统是混沌的，序列及相图如右图所示。

该系统中正的Lyapunov指数个数随时滞的增长而增加。以上系统说明，时滞混沌系统可以通过极简单的结构产生具有极高随机性和不可预测性的时间序列。这正是信息保密安全通信所需要的特征。

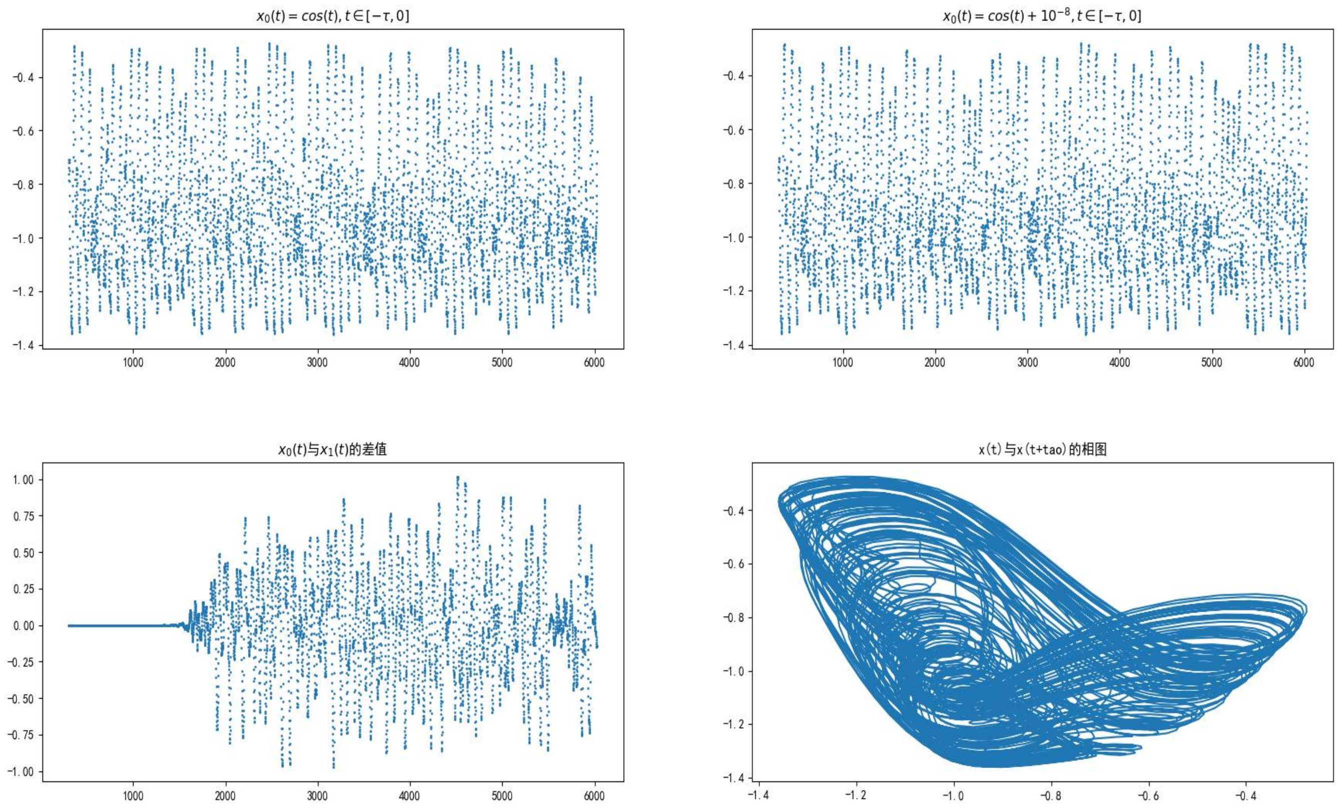


图4 M-G系统序列及相图可视化

研究背景

➢ 混沌理论应用

Field	Author	Research Title	Country
气象学和气候科学	Ruslan et al. (2020)	Nonlinear Forecasting for a Time Series of Carbon Monoxide in Areas with High Population Density in Sabah	Malaysia
	Shen et al. (2021)	Is Weather Chaotic?: Coexistence of Chaos and Order within a Generalized Lorenz Model	China
	Schemm et al. (2023)	Learning from Weather and Climate Science to Prepare for a Future Pandemic	United State
经济与金融市场	Debnath (2022)	The Effect of Chaos Theory in the Field of Business: A Review	Bangladesh
	Markus Vogl (2024)	Chaos Measure Dynamics in a Multifactor Model for Financial Market Predictions	Germany
生物学和生态学	Shirazi and Subramaniam (2020)	Attractor Ranked Radial Basis Function Network: A Nonparametric Forecasting Approach for Chaotic Dynamic Systems	United State
工程与控制系统	Gupta (2022)	Application of Chaos Theory for Arrhythmia Detection in Pathological Databases	India
医学与生理学	Mashuri et al. (2023)	The Application of Chaos Theory on Covid-19 Daily Time Series Dataset in Malaysia	Malaysia
	Rehman et al. (2022)	A Novel Chaos-based Privacy-preserving Deep Learning Model for Cancer Diagnosis	U.K.
社会科学与社会学	Lai J W, Cheong K H (2024)	A Parrondo Paradoxical Interplay of Reciprocity and Reputation in Social Dynamics	Singapore

研究背景

➢ 混沌理论 + 机器学习/深度学习

混沌系统的传统模型通常很复杂且计算量大。人工智能，尤其是神经网络，提供了一种更有效的方法。例如MIT研究人员的工作表明神经网络可以通过训练来有效地模拟大型系统中发现的混沌，帮助研究长期行为并在复杂的工程系统（例如自主机器人和自动驾驶汽车）中进行预测。

研究方向1	研究神经网络模型中出现的混沌现象，使用混沌理论来研究深度学习优化
研究方向2	研究混沌系统的参数估计以及混沌控制技术，提高系统稳定性和效率
研究方向3	用深度学习方法预测混沌时间序列

。
。
。

2

研究方向

Introduction

研究方向1

- **研究神经网络模型中出现的混沌现象，使用混沌理论来研究深度学习优化**

训练人工神经网络ANN的过程涉及迭代调整其参数，以便在面临学习任务时最小化网络预测的误差。这种迭代变化可以自然地解释为网络空间中的轨迹（网络的时间序列），因此训练算法（例如，合适的损失函数的梯度下降优化）可以解释为图空间中的动态系统，因为通过训练演化的数学对象就是人工神经网络本身的结构。

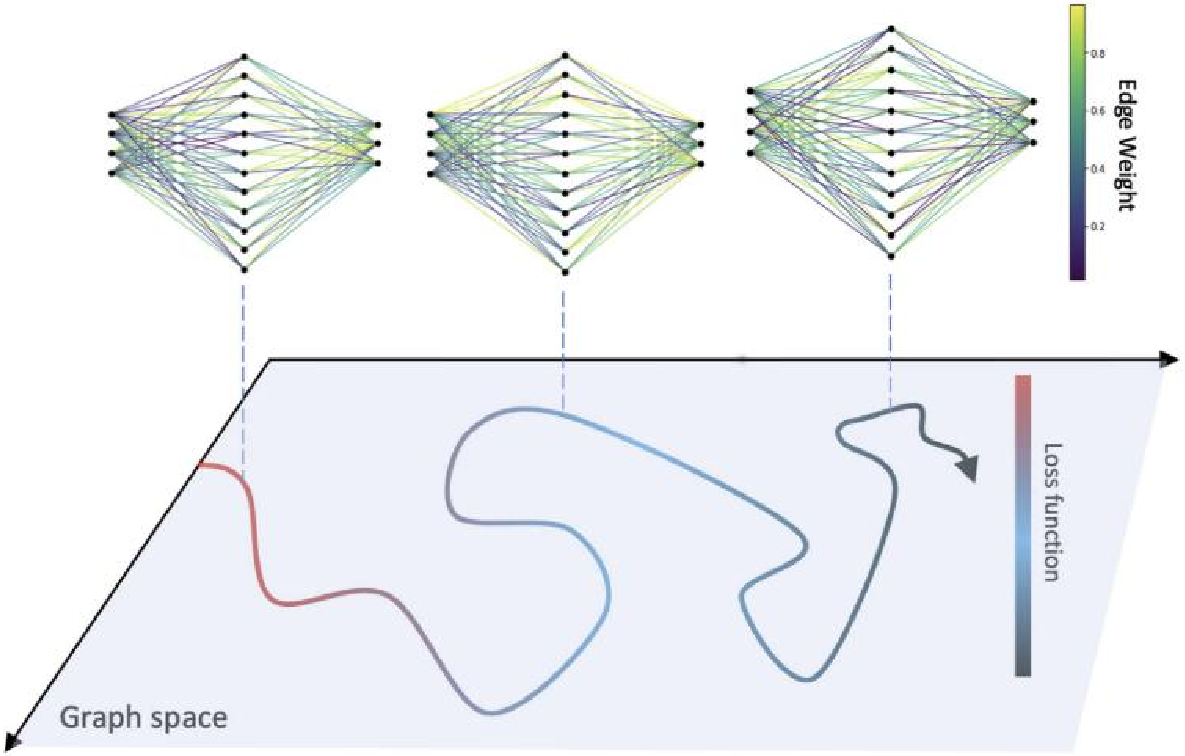


图5 ANN 的训练过程被描述为图空间中的网络轨迹

论文介绍

[3] Sasdelli M, Ajanthan T, Chin T J, et al. A chaos theory approach to understand neural network optimization[C]//2021 Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA). IEEE, 2021: 1-10.

Motivation：

混沌理论使研究者能够研究可学习参数（即优化轨迹）的演化，以便理解大时间尺度（即迭代次数）上的训练行为。认为混沌理论是理解基于SGD的神经网络优化的有用方法。

研究内容：

关注学习率对SGD优化轨迹的影响。通过观察SGD的Lyapunov指数是损失的Hessian矩阵的最负特征值，引入了一种有效且准确的方法来估计损失曲率。首次揭示了SGD相对于更复杂的二阶方法的有效性，并证实了SGD对于各种学习率都能稳健收敛的观察结果。

论文介绍

[4] Danovski K, Soriano M C, Lacasa L. Dynamical stability and chaos in artificial neural network trajectories along training[J]. Frontiers in Complex Systems, 2024, 2: 1367957.

Motivation:

1. 随着损失函数的更新，人工神经网络的结构在图空间中如何演变?

2. 在产生非单调递减损失函数的优化方案中，人工神经网络的具体结构是如何演变的?

从动力系统角度，人工神经网络是一个不断发展的系统，其动态变量是参数（权重和偏差），动态方程是由训练算法隐式定义的方程，即，这是一个（高维）离散时间映射。因此，整个训练过程只不过是高维权重空间中的一条轨迹，即一种特定类型的时间网络[5]，它被创造为网络轨迹[6,7]。

研究内容:

通过分析浅层神经网络的网络轨迹来研究该过程的动态特性，并通过学习简单的分类任务来研究其演化。针对学习率的特定值跟踪训练期间网络（在图空间中）的演化轨迹，探索其动态和轨道稳定性，找到规则和混沌行为的暗示。

论文介绍

系统参数集$\mathbf{W}(t)$的动力学方程是梯度下降算法，

$$\mathbf{W}(t+1)=\mathbf{W}(t)-\eta\nabla\mathcal{L}[\mathbf{W}(t)]\equiv g[\mathbf{W}(t);\eta]。$$

图6中绘制了所得的最大Lyapunov指数。

图7展示了针对四种不同的网络初始条件和扰动半径，从第二列的指数发散观察到网络空间中存在对初始条件的敏感性。

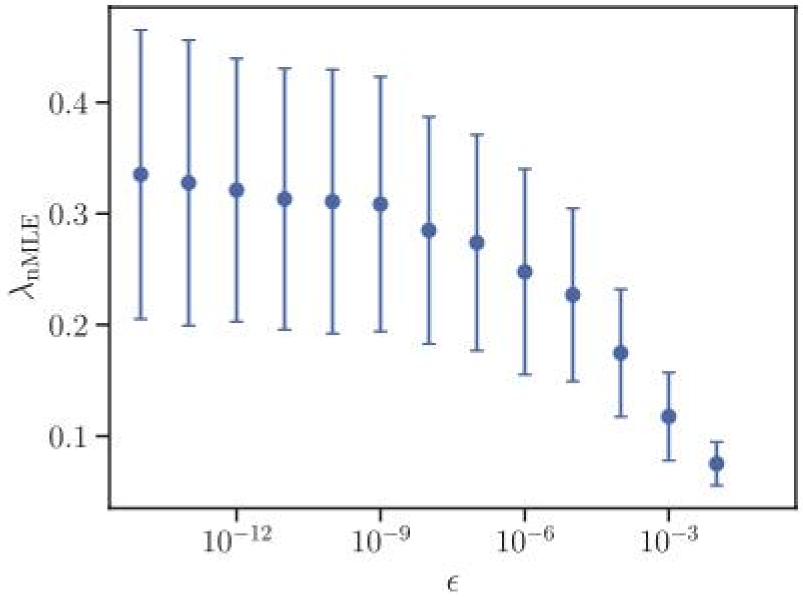


图6 网络最大Lyapunov指数的均值和标准差

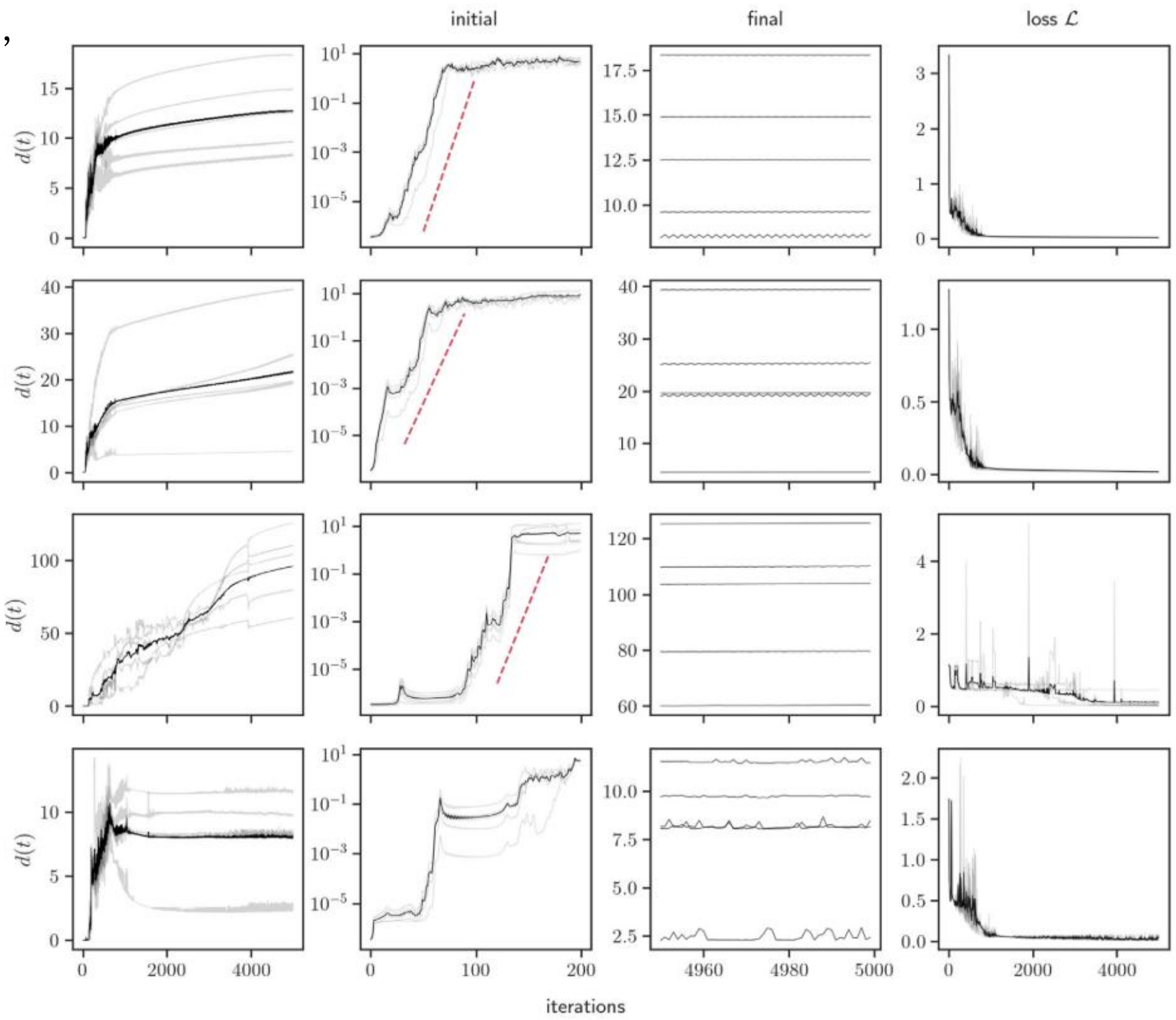


图7 不同初始条件下轨迹距离及损失的对比

论文介绍

研究结论：

1. 低学习率（$\eta = 0.01$）状态下的网络非常依赖于初始条件；

2. 当学习率很大但损失函数仍然收敛（$\eta = 1$）时，损失函数时间序列和网络轨迹中出现了复杂行为的暗示，包括非单调损失动态和初始条件敏感依赖性。

3. 在（非常）大的学习率（$\eta = 5$）中，观察到损失和网络本身的准周期和类混沌演化的交替（表明存在混沌间歇性）。需要进一步的研究来更好地理解这些机制的动态性质、它们与复杂行为的经典范式（例如混乱的间歇性路径）的可能关系，以及如何利用这些机制以极大的学习率开发基于确定性梯度的训练策略。

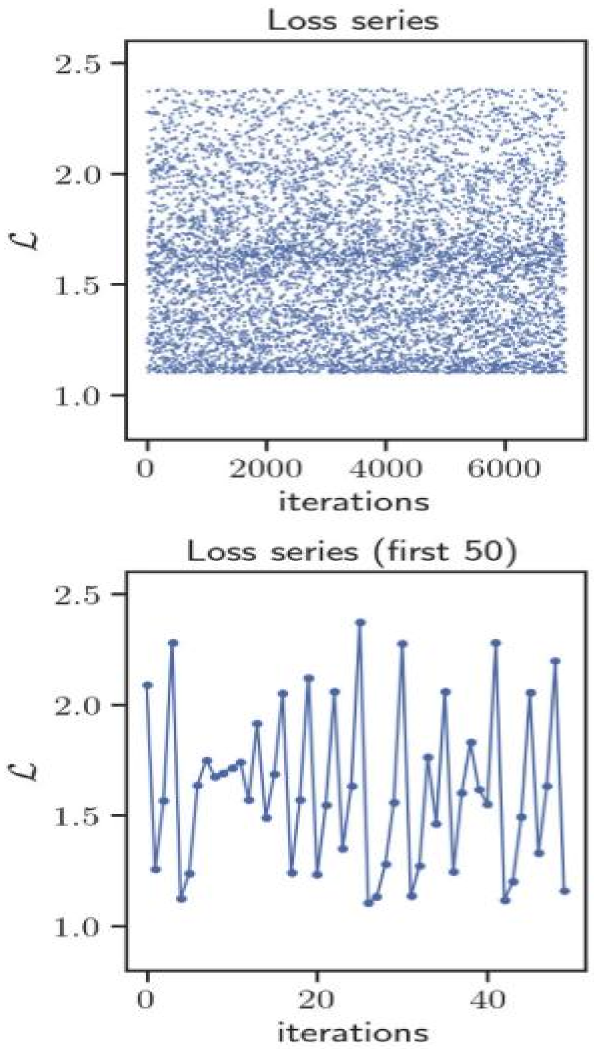
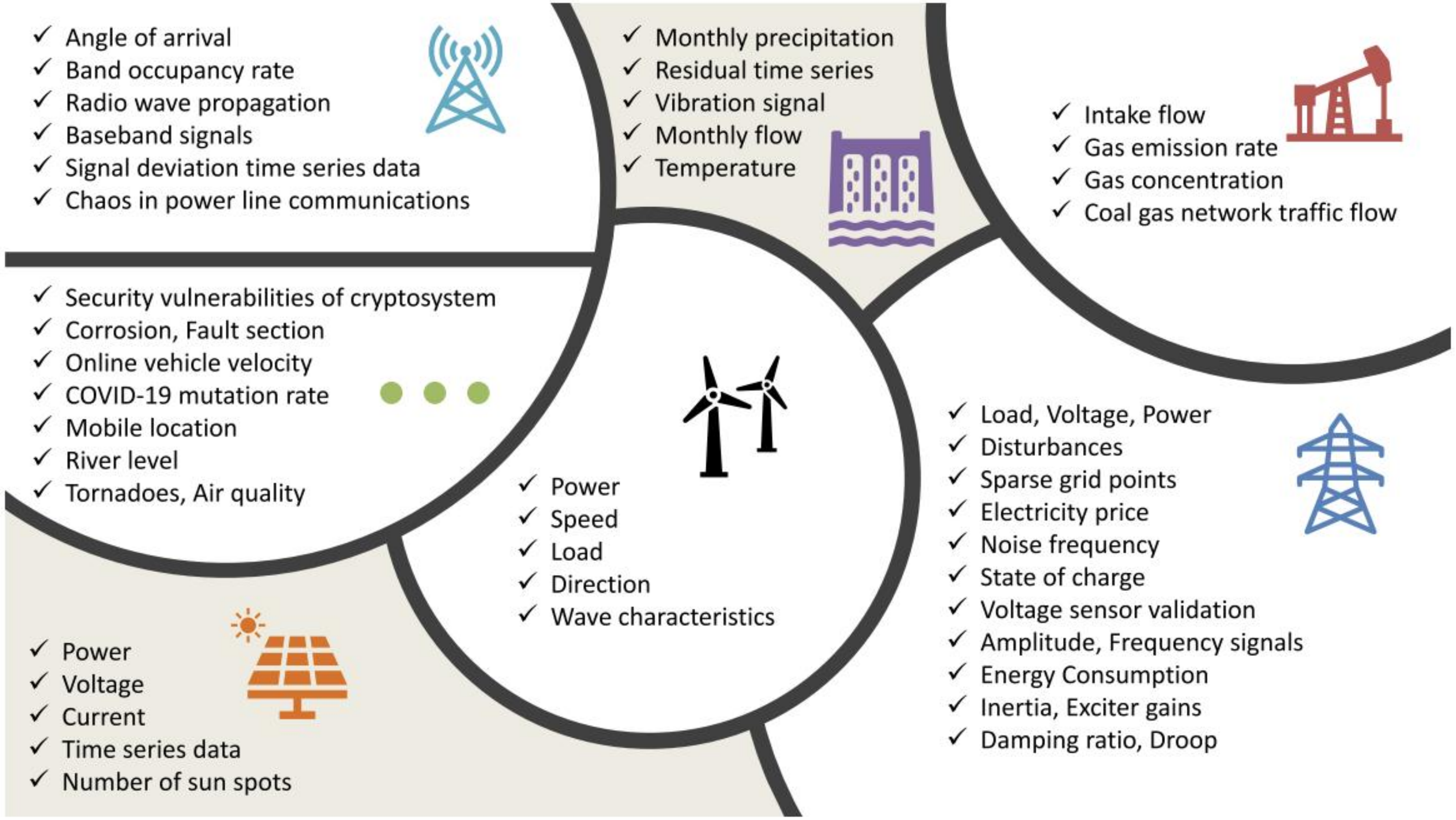


图8 η=5 状态下单个轨迹的类混沌损失的代表性序列。（上）类混沌状态下损失的时间序列；（下）放大损失序列的前50次迭代。

研究方向2

➢ **研究混沌控制技术，提高系统稳定性和效率**

混沌控制是非线性动力学研究的一个重要领域，因为它能够增强各种应用中的系统稳定性和效率。混沌控制技术显着提高了研究者驱动混沌系统实现期望行为的能力。 这些方法不仅提高了混沌系统的可预测性和稳定性，而且还为各种应用的创新开辟了可能性。



- 电力和能源预测
- 水文系统
- 通信信号与系统
- 石油和天然气
- 二极管谐振器电路等

图9 不同应用的预测参数列表

论文介绍

➢ 现代混沌控制技术

[8] Suth D, Luther S, Lilienkamp T. Chaos control in cardiac dynamics: terminating chaotic states with local minima pacing[J]. Frontiers in Network Physiology, 2024, 4: 1401661.

Motivation：

目前对心室颤动等心律失常的治疗涉及应用高能电击，这会在心肌中感应出大量电流，因此会产生严重的副作用，例如可能的组织损伤和创伤后应激。除颤/起搏是通过外部电场应用受控电刺激来对抗心肌电激励中的螺旋/滚动波动力学，最终目标是终止心律中的所有混沌模式，使心脏电系统可以重新启动窦性节律。

研究内容：

作者研究了一种新颖的基于反馈的方法，该方法结合了起搏过程中心脏的动态，以进一步最大限度地减少成功除颤所需的能量，从而减轻与高能量除颤相关的负面影响。 所提出的方法仅依赖于跨膜电位平均值的测量，这是一种可以在数值模拟中非常容易测量的可观察值。

论文介绍

➢ 现代混沌控制技术

[9] Yau H T, Kuo P H, Luan P C, et al. Proximal policy optimization-based controller for chaotic systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2024, 34(1): 586-601.

Motivation：

传统控制理论倾向于将混沌系统线性化，这可能会在几种意想不到的情况下导致失败。 因此，研究人员尝试使用不同的控制策略来应对这些麻烦的系统。 混沌控制理论的大部分都源自反馈控制理论。

研究内容：

作者验证深度强化学习智能体是否可以轻松控制混沌系统，而无需麻烦的反馈控制和线性化。从而提出了一种基于深度强化学习的控制方法，该方法可以控制非线性混沌系统，而无需系统方程的任何先验知识。使用近端策略优化来训练代理。 实验环境是一个洛伦兹混沌系统，目标是尽快稳定这个混沌系统，并通过向混沌系统添加额外的控制项来最小化误差。

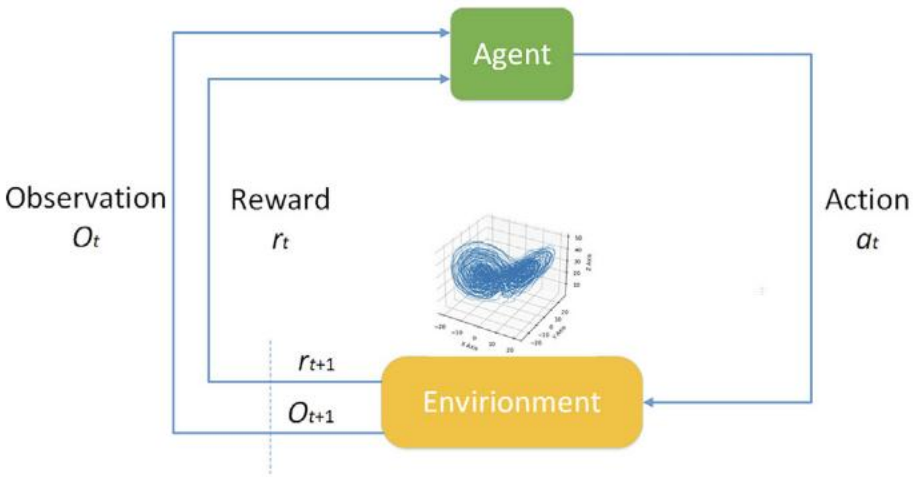


图10 提出的模型框架

研究方向3

➢ **混沌时间序列预测（经典系统或现实世界观测数据）**

（1）经典混沌系统时间序列；（2）现实世界混沌系统观测到（采样）的时间序列

离散时间序列是采样自连续动态系统，长期时间序列预测（LTSF）是对其动态结构进行建模从而进行预测。现实世界中的很多数据是混沌的，源于一个未知的高维底层混沌系统，其广泛包含周期性之外的非线性行为。从混沌的角度重新审视 LSTF 任务：线性或复杂的非线性动态系统在经过充分的演化后，其轨迹表现出稳定的模式，即吸引子。

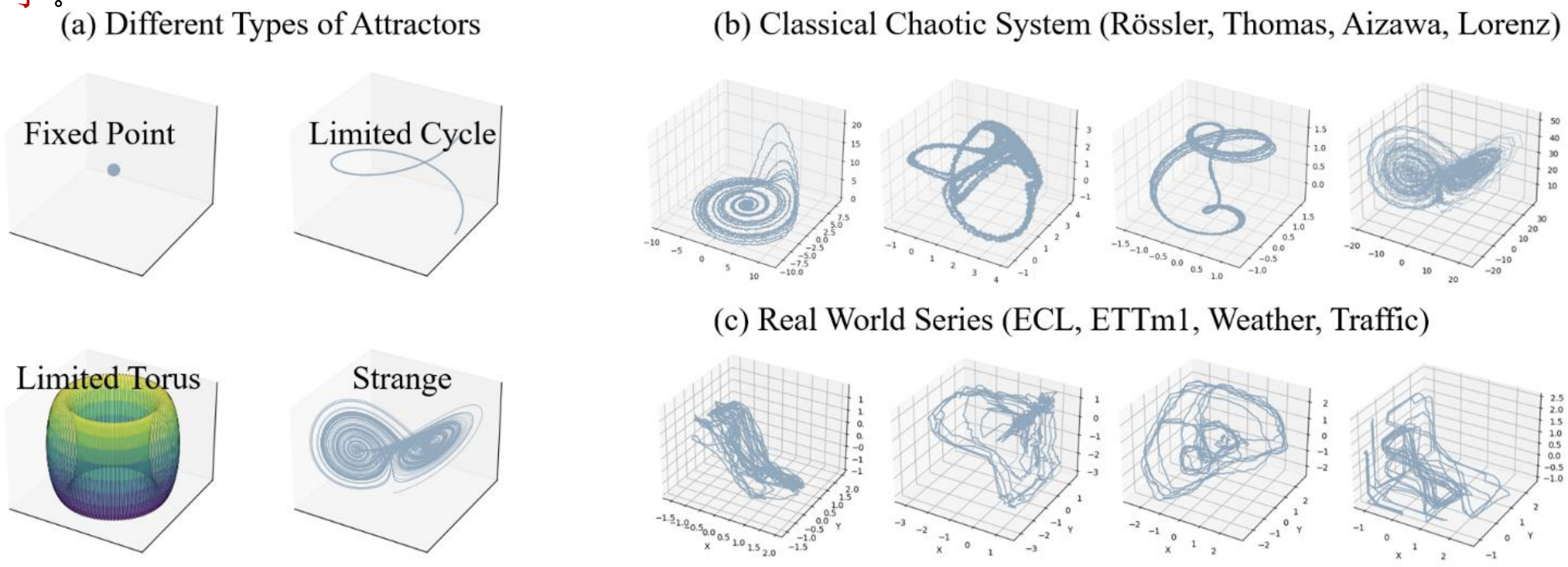


图11 (a) 不同类型的吸引子；(b) 经典混沌系统；(c) 真实世界时间序列相空间结构

论文介绍

➢ 经典混沌动力系统的时间序列预测

[10] Wang M, Li J. Interpretable predictions of chaotic dynamical systems using dynamical system deep learning[J]. Scientific Reports, 2024, 14(1): 3143.

Motivation:

对混沌动力系统进行准确预测是一项重要但具有挑战性的任务，在各个学科中有许多实际应用。 然而，当前的动力学方法只能提供短期的精确预测，而性能较好的主流深度学习技术始终受到模型复杂性和可解释性的影响。

研究内容:

提出了一种新的基于动力学的深度学习方法，即动态系统深度学习（DSDL），将动力学方法与深度学习方法相结合。 实验分别在3变量洛伦兹系统，4变量超混沌洛伦兹系统，5变量概念海洋-大气耦合洛伦兹系统和M-G系统上进行。对四种不同复杂度的混沌动力系统进行的多次实验显着证明了 DSDL 相对于本工作中用于比较的其他动力和深度学习方法的优越性能。

论文介绍

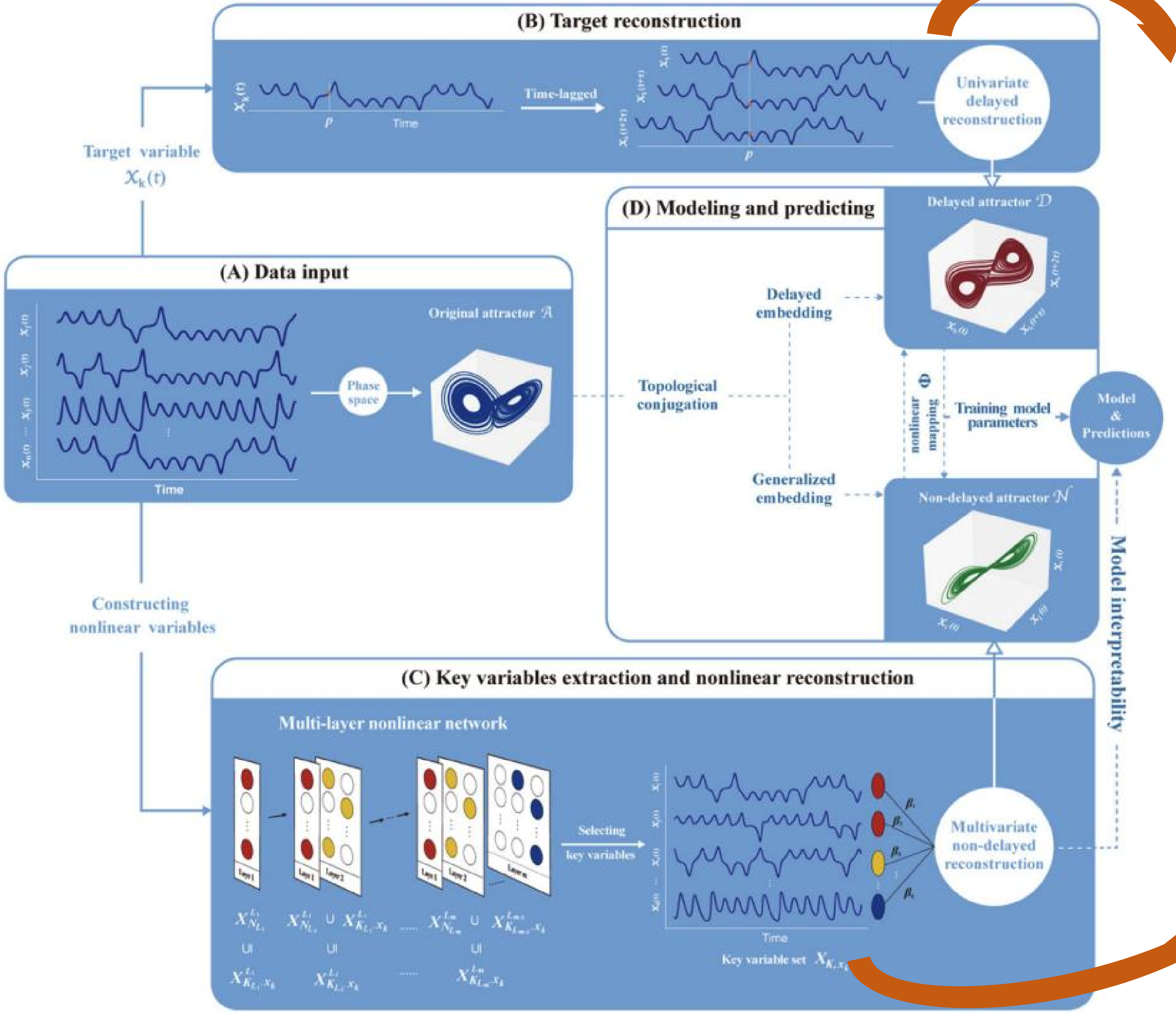


图12 DSDL框架的结构

从目标变量时间序列中得到延迟吸引子。

用基于交叉验证的逐步回归 (CVSR) 方法，从 X_N 中选择那些真正控制目标变量演化的变量来构造关键变量集，有效地探索DSDL模型的关键信息并去除冗余信息，从而降低模型复杂度。

从多元时间序列中得到非延迟吸引子，目的是获得系统变量之间的空间信息。

论文介绍

研究结论：

实验分别在3变量洛伦兹系统，4变量超混沌洛伦兹系统，5变量概念海洋-大气耦合洛伦兹系统和M-G系统上进行。

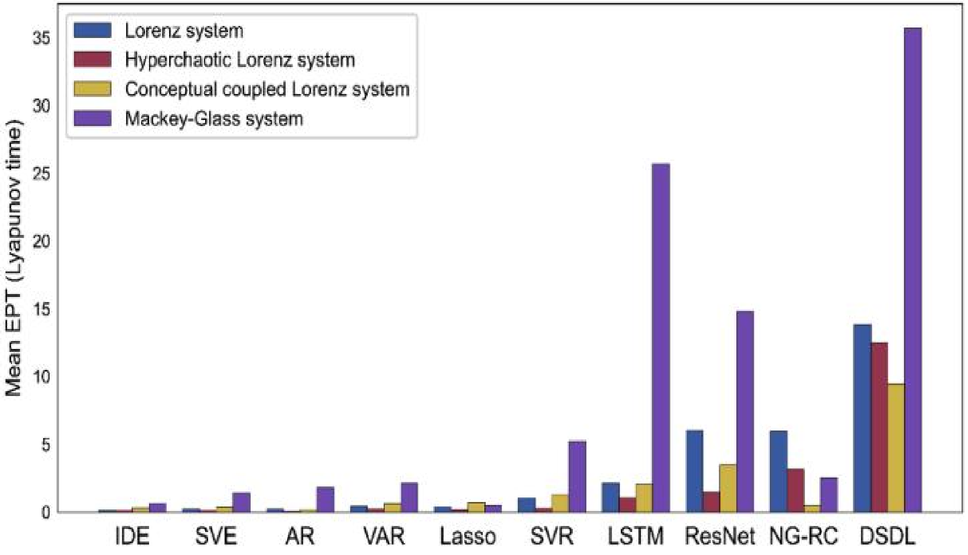


图13 DSDL与其他模型的对比

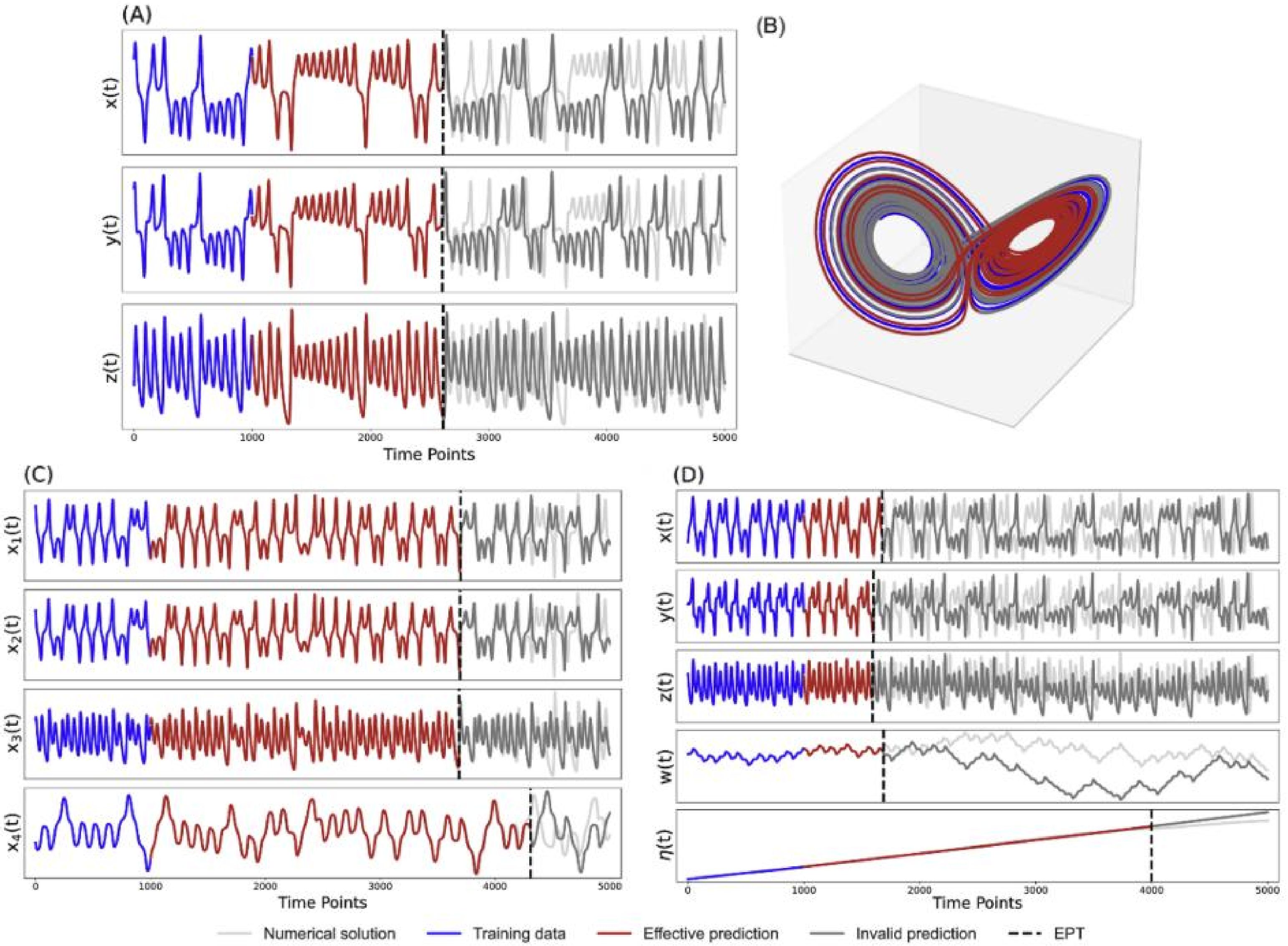


图14 DSDL在3个动态系统的预测结果

论文介绍

➢ 混沌时间序列预测

1. 数据驱动方法：RNN， LSTM， 回声状态网络（Echo State Networks, ESNs）；

2. 物理驱动方法：物理信息神经网络（Physics-Informed Neural Networks, PINNs），物理信息神经算子（Physics-Informed Neural Operators, PINOs）；

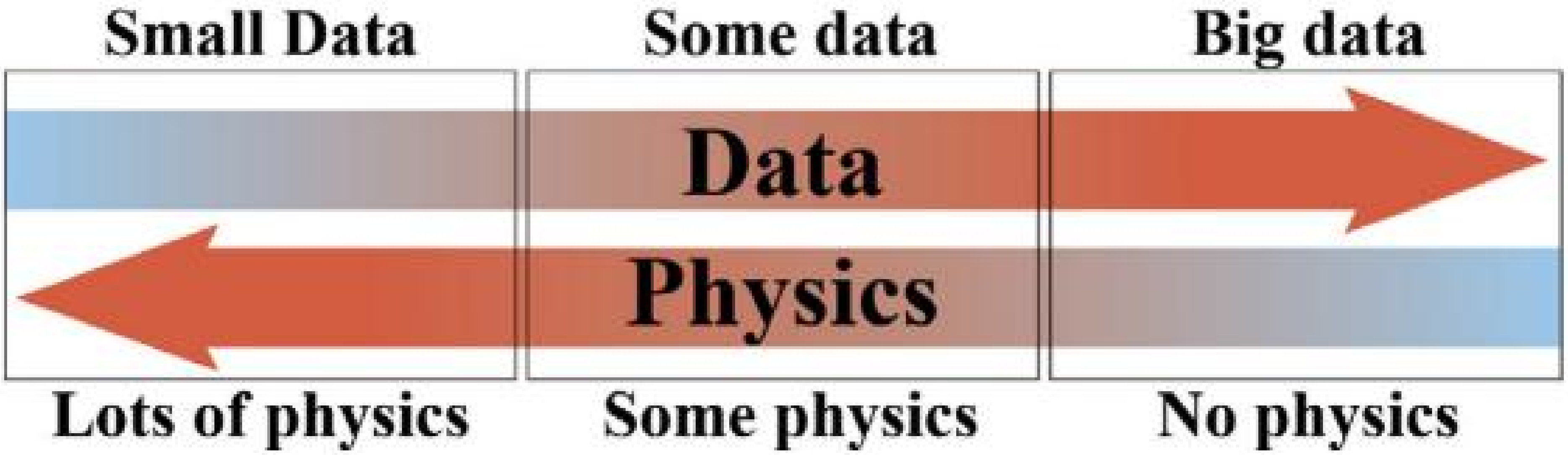


图15 数据与物理先验

论文介绍

[11] Wang Q, Jiang L, Yan L, et al. Chaotic time series prediction based on physics-informed neural operator[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2024, 186: 115326.

Motivation：

现实世界的混沌系统在获取丰富且原始的训练数据（无噪声）方面往往面临挑战，并且获得全面准确地表达混沌系统动态特性的方程也是不切实际的。

研究内容：

研究使用PINO和不同驱动方法（例如数据驱动方法、物理驱动方法和混合数据物理驱动方法）对混沌时间序列进行预测。

数据是来自于两个经典的时滞混沌系统，包括麦基-格拉斯方程（Mackey–Glass equation, MG）和光电振荡器（Optoelectronic Oscillator, OEO）。

论文介绍

研究结论：

1. 在纯数据驱动的条件下，使用无噪声标记数据集训练PINO，证明通过足够数量的样本，无需先验物理知识即可获得高精度结果；

2. 在纯物理驱动的条件下，使用随机生成的初始条件训练PINO，而无需预先准备标记数据集，证明只要准确了解方程形式，即充分理解物理先验，就可以仅通过物理驱动的方法获得高精度结果。

3. 当无法获得准确的物理先验且数据受到噪声污染时，首先采用物理驱动的方法来学习具有不准确参数的方程中的非线性动力学，然后使用受噪声污染的数据进行微调，会产生更好的结果。

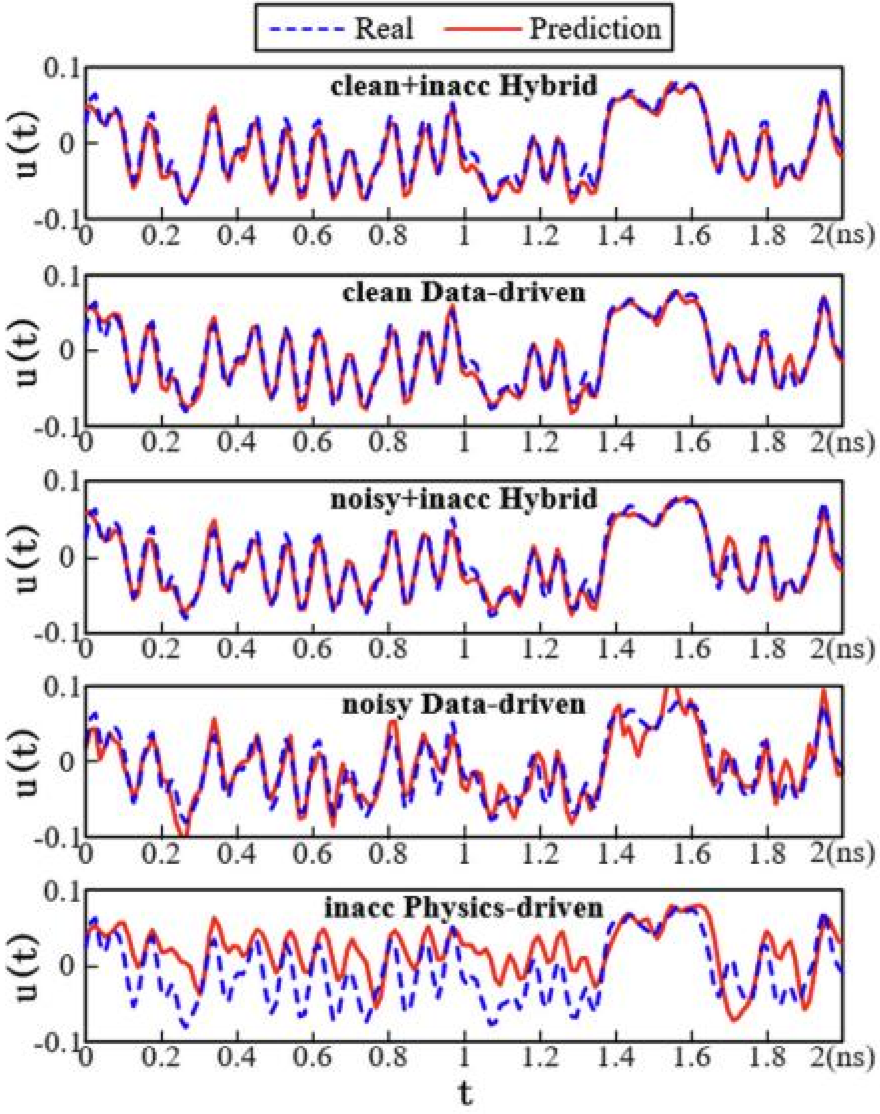


图16 真实OEO系统的预测结果对比图

论文介绍

[11] Wang Q, Jiang L, Yan L, et al. Chaotic time series prediction based on physics-informed neural operator[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2024, 186: 115326.

研究内容:

相空间重构+轻量级神经常微分方程（NODE）模型的新方法，该模型融合了微分方程的数学复杂性和神经网络的自适应学习能力，以及相空间重构

论文介绍

[12] Ren W, Jin N, OuYang L. Phase Space Graph Convolutional Network for Chaotic Time Series Learning[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2024.

研究内容:

提出相空间图卷积网络（PSGCN）进行混沌时间序列分析，实验结果表明，复杂网络与GCN相结合为学习混沌时间序列提供了一种有用的方法。

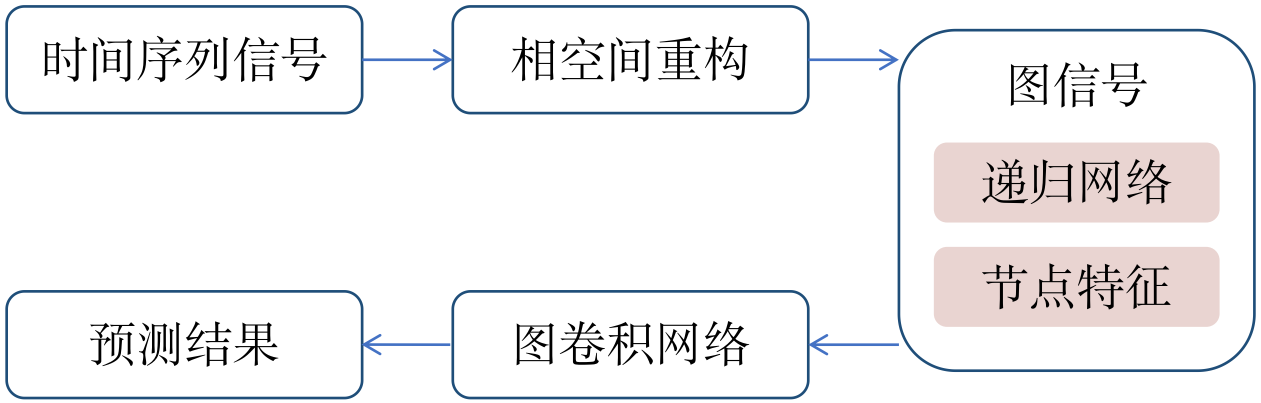


图17 相空间图卷积网络的流程图

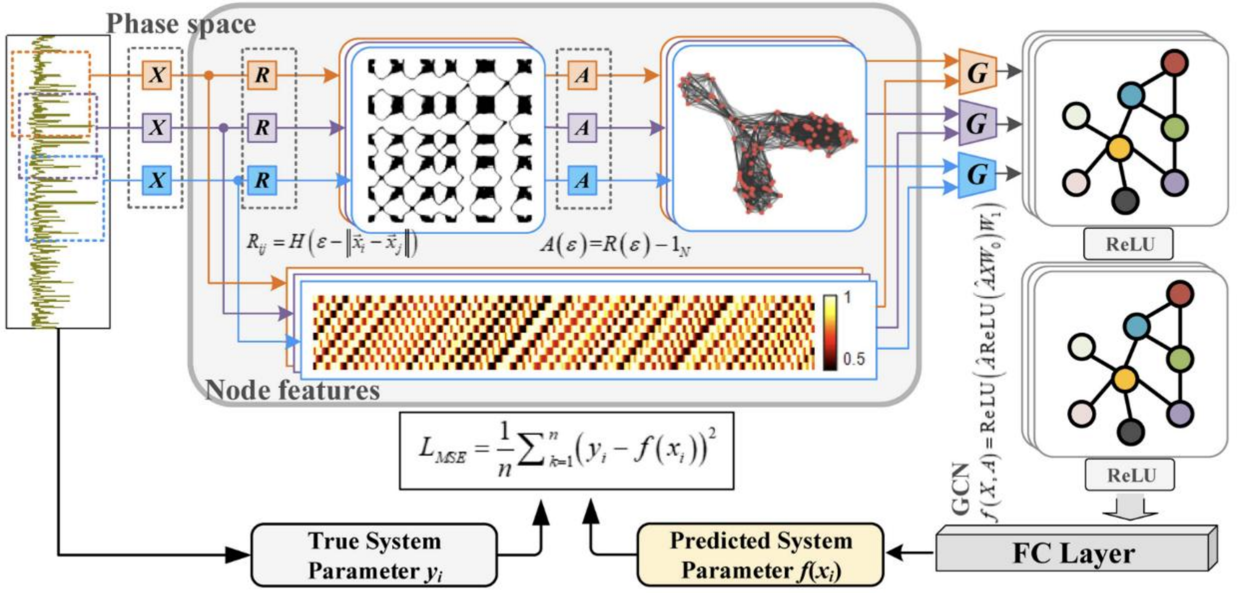


图18 相空间图卷积网络的结构图

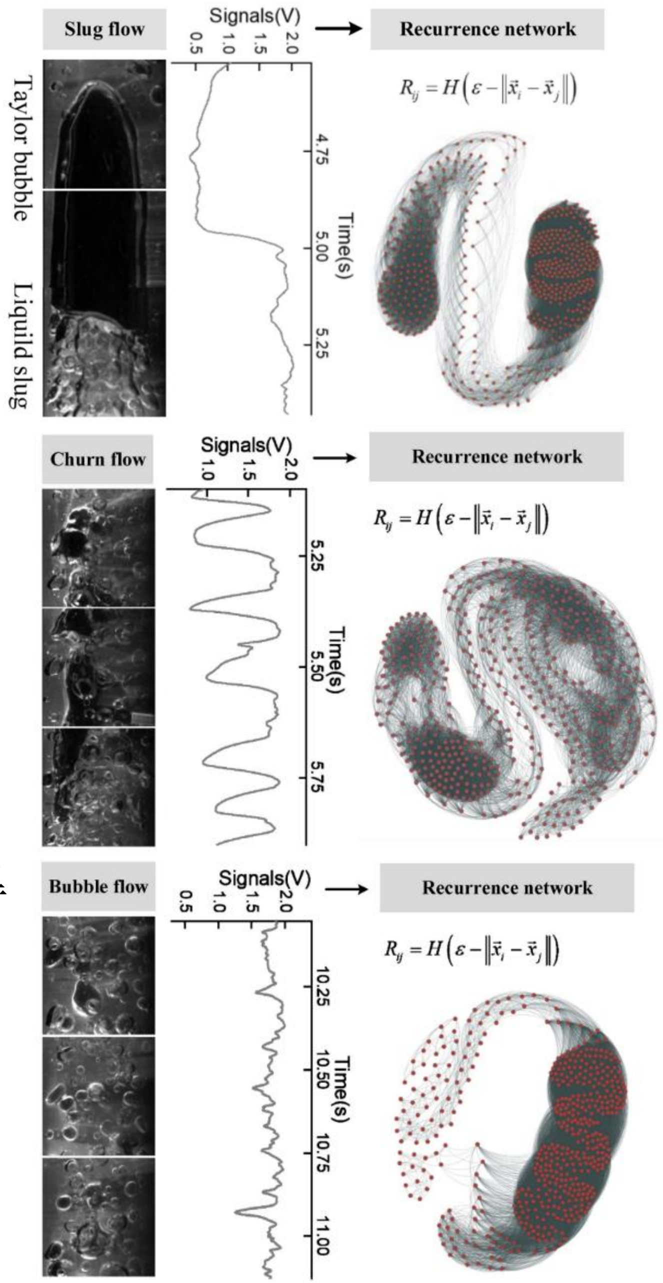
论文介绍

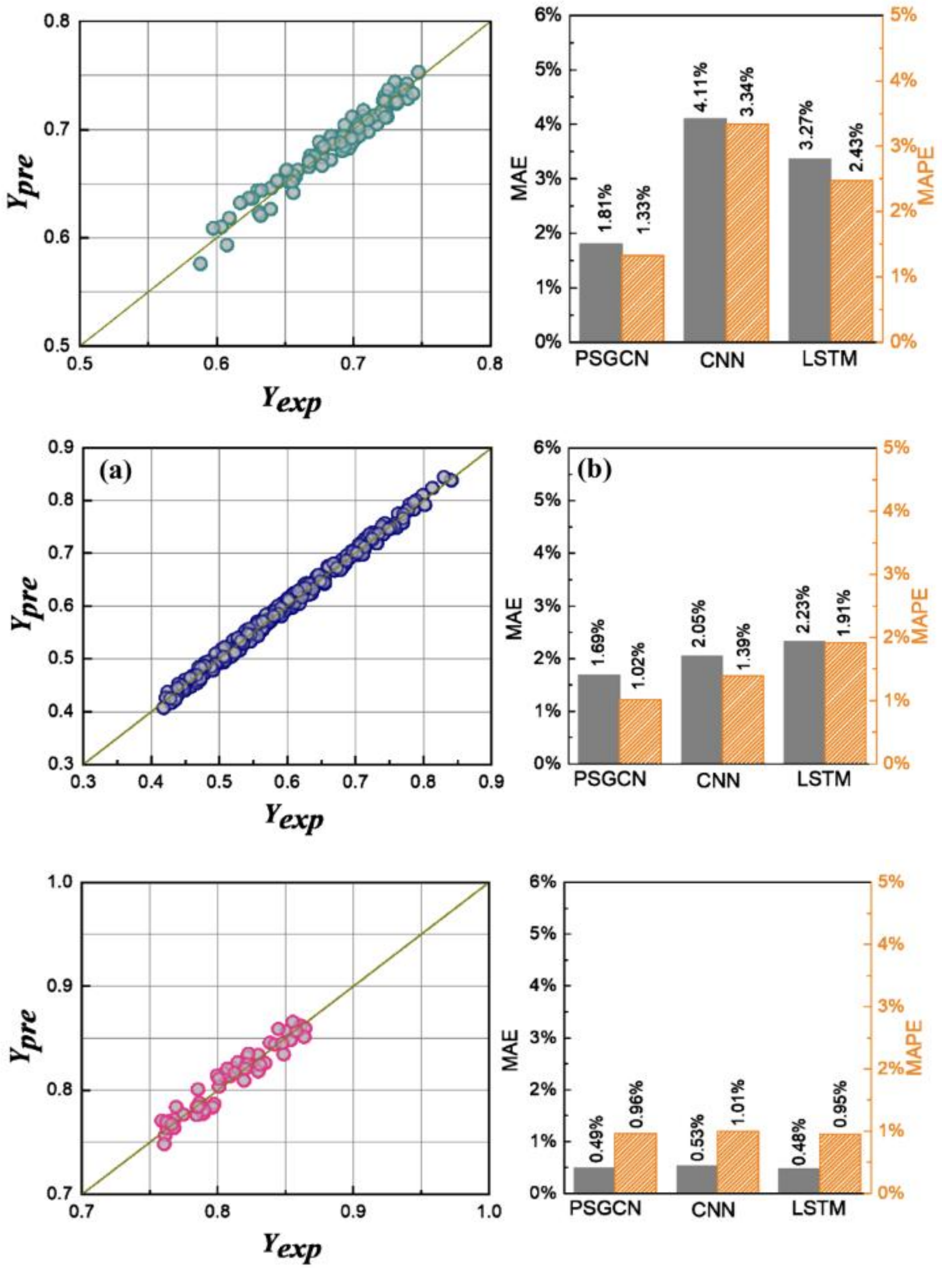
➢ **气液两相流测量实验:**

为了进行实际验证，将PSGCN应用于气液两相流测量。 气液两相流广泛存在于化工、航空航天、石油工业等领域。

在非线性时间序列分析和流体力学领域，通过实验观察确定气液流动的流动参数一直是一个突出的多学科课题。

通过使用电导信号预测不同模式下气液两相流的持水率，进一步验证了PSGCN。 PSGCN 比 CNN 和 LSTM 取得了更好的持水率预测性能。





3

总结

Summary

总结

人工智能和混沌理论的融合是一个快速发展的领域，对于增进我们对复杂系统的理解具有巨大的潜力。尽管挑战仍然存在，特别是在数据可用性和模型可解释性方面，但这两个领域之间的协作有望在多个学科领域提供突破性的见解和应用。

混沌理论与深度学习的结合近年来取得了显著进展，尤其在混沌时间序列预测中表现出卓越的能力。通过深度学习模型，研究者可以更精确地预测复杂系统的动态行为，替代了许多传统的数值方法。此外，神经网络还被用于理解和分类复杂的混沌现象，帮助揭示系统的底层结构和动力学规律。

未来，混沌理论与深度学习/人工智能的结合将在更高效的模型、可解释性和跨学科应用上取得突破。特别是在复杂的动态环境下，深度学习与混沌理论的结合有望为复杂系统的预测与控制带来新的可能性。这一领域的进展将推动从天气预测到经济系统等众多现实问题的解决。

参考文献

[1] Ramadevi B, Bingi K. Chaotic time series forecasting approaches using machine learning techniques: A review[J]. Symmetry, 2022, 14(5): 955.
[2] Vogl M. Controversy in financial chaos research and nonlinear dynamics: a short literature review[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2022, 162: 112444.
[3] Sasdelli M, Ajanthan T, Chin T J, et al. A chaos theory approach to understand neural network optimization[C]//2021 Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA). IEEE, 2021: 1-10.
[4] Danovski K, Soriano M C, Lacasa L. Dynamical stability and chaos in artificial neural network trajectories along training[J]. Frontiers in Complex Systems, 2024, 2: 1367957.
[5] Temporal network theory[M]. New York: Springer, 2019.
[6] Lacasa L, Rodriguez J P, Eguiluz V M. Correlations of network trajectories[J]. Physical Review Research, 2022, 4(4): L042008.
[7] Caligiuri A, Eguíluz V M, Di Gaetano L, et al. Lyapunov exponents for temporal networks[J]. Physical Review E, 2023, 107(4): 044305.
[8] Suth D, Luther S, Lilienkamp T. Chaos control in cardiac dynamics: terminating chaotic states with local minima pacing[J]. Frontiers in Network Physiology, 2024, 4: 1401661.
[9] Yau H T, Kuo P H, Luan P C, et al. Proximal policy optimization-based controller for chaotic systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2024, 34(1): 586-601.
[10] Wang M, Li J. Interpretable predictions of chaotic dynamical systems using dynamical system deep learning[J]. Scientific Reports, 2024, 14(1): 3143.
[11] Wang Q, Jiang L, Yan L, et al. Chaotic time series prediction based on physics-informed neural operator[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2024, 186: 115326.
[12] Ren W, Jin N, OuYang L. Phase Space Graph Convolutional Network for Chaotic Time Series Learning[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2024.

请大家批评指正